Année 1975

THÉORÈME DE HARDY SUR LES ZÉROS DE LA CÉLÈBRE FONCTION ζ DE RIEMANN

ÉNONCÉ

Préambule

Les propriétés suivantes de la fonction Γ pourront être utilisées sans démonstration; elles n'interviennent pas dans la première partie du problème.

Soit s un nombre complexe; on note $\mathrm{Re}(s)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(s)$ sa partie imaginaire. Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt .$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Ces pôles sont simples, et le résidu de Γ au point $s = -p$, $(p \in \mathbf{N})$, est $\dfrac{(-1)^p}{p!}$.

Si s n'est pas un pôle, on a : $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, et : $\Gamma(s) \neq 0$.

Soient σ_1, σ_2 des nombres réels tels que $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, et m un entier positif; on a : $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\, t^m\, \Gamma(\sigma + it) \,| = 0$, uniformément pour σ élément de $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Enfin, si c et x sont des nombres réels strictement positifs, on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = c} x^{-s}\, \Gamma(s)\, ds ,$$

la droite $\mathrm{Re}(s) = c$ étant orientée dans le sens des ordonnées croissantes. (Cette convention d'orientation est conservée pour toutes les intégrales analogues apparaissant dans le problème).

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à $[-\pi, \pi[$, et on pose : $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg}(z)$, puis, pour tout nombre complexe a : $z^a = e^{a \operatorname{Log}(z)}$.

Dans tout le problème, $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Soit λ un réel strictement positif; une fonction f définie dans $\mathfrak{P}$ est dite périodique, de période λ, si, quel que soit $z \in \mathfrak{P}$, on a : $f(z+\lambda) = f(z)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit f une fonction définie dans $\mathfrak{P}$, holomorphe et périodique de période λ.

a. Démontrer qu'il existe une fonction g, définie et holomorphe dans l'ouvert :

$$\{ z \mid z \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad 0 < |z| < 1 \},$$

telle que

$$g(e^{2i\pi z/\lambda}) = f(z) \quad .$$

b. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathfrak{P}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose :

(1) $$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t+iy_0)\, e^{-2i\pi n(t+iy_0)/\lambda}\, dt \; .$$

Démontrer que a_n est indépendant de z_0, et que

(2) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{2i\pi n z/\lambda} \; ,$$

la convergence de cette série étant uniforme sur toute partie compacte de $\mathfrak{P}$. La fonction f est dite holomorphe (resp. méromorphe) à l'infini si la fonction g est holomorphe (resp. méromorphe) en zéro; donner les conditions sur les a_n pour qu'il en soit ainsi. Dans la suite, on dira que les a_n sont les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose qu'il existe deux constantes positives c et ρ telles que, quel que soit $z = x + iy \in \mathfrak{P}$, avec $y \leqslant 1$, on ait

(3) $$|f(x+iy)| \leqslant c\, y^{-1-\rho} .$$

Démontrer que

(4) $$\sup_{n \in \mathbf{Z}^*} |a_n|\, |n|^{-\rho-1} < +\infty \; .$$

2° *a.* Soit $\rho > 0$. Montrer que la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = n^\rho \frac{n\,!}{(\rho+1)\,(\rho+2)\ldots(\rho+h)\ldots(\rho+n)}$$

est bornée.

$\left(\text{On pourra utiliser la série de terme général } \operatorname{Log} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

b. Soit

$$(a_n)_{n \geqslant 0}$$

une suite de complexes. On suppose l'existence d'un réel ρ, strictement positif, tel que :

(5) $$\sup_{n \in \mathbf{N}^*} |a_n|\, n^{-\rho} < +\infty$$

et l'on considère l'application f, de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{C}$, définie par

(6) $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z/\lambda}$$

Montrer que f est holomorphe et que (3) est vérifiée pour une valeur convenable de la constante positive c.

Montrer que, pour tout réel γ strictement positif, on a

$$\lim_{t \to +\infty} t^\gamma\, |f(it) - a_0| = 0 .$$

DEUXIÈME PARTIE

Soient λ un réel strictement positif et $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que (5) soit vérifiée. On définit f par (6), et l'on pose, pour $\operatorname{Re}(s) > \rho + 1$,

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} , \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi(s)$$

1° *a.* Montrer que φ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(s) > \rho + 1$.

b. Montrer, avec soin, que

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,(f(it) - a_0)\, dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \rho + 1 ,$$

et qu'inversement, pour $\alpha > \rho + 1$ et $y > 0$, on a

$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

c. Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur toute « verticale » du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$.

2° Soient ε et k des réels tels que $|\varepsilon| = 1$ et $k > 0$. On suppose que Φ possède les propriétés suivantes [A] et [B] :

[A]. Notant ω l'ensemble des complexes distincts de 0 et de k, la fonction Φ admet un prolongement holomorphe à ω, et ce prolongement, noté encore Φ, vérifie : $(\forall s \in \omega)\ (\Phi(s) = \varepsilon\,\Phi(k - s))$.

[B]. La fonction $s \longmapsto \Phi(s) + a_0\left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{k-s}\right)$ se prolonge en une fonction entière de s, et est bornée sur toute bande « verticale ».

a. Soit α un réel tel que $\alpha > \rho + 1$ et $\alpha > k$. On note U la partie de $\mathbf{C}$, ensemble des complexes s tels que

$$k - \alpha \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(s)| \geqslant 1$$

Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur la frontière de U, puis que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée dans U.

[On pourra utiliser le résultat précédent et considérer, pour tout $a > 0$, la fonction $s \longmapsto e^{as^2}\,s^2\,\Phi(s)$; on rappelle l'énoncé : *Principe du maximum* : Soit V un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Soit g une fonction définie et continue dans l'adhérence de V et holomorphe dans V. Si ∂V désigne la frontière de V, on a $\sup_{z\in V}|g(z)| = \sup_{z\in\partial V}|g(z)|$].

b. Pour tout réel y, strictement positif, on pose :

$$\mathrm{I}(y) = \int_{\mathrm{Re}(s)=k-\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds \quad \text{et} \quad \mathrm{J}(y) = \int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

Montrer que $\mathrm{I}(y) = \varepsilon\,y^{-k}\,\mathrm{J}\left(\frac{1}{y}\right)$ et expliciter $\mathrm{J}(y) - \mathrm{I}(y)$.

c. Déduire de *b.* que f possède la propriété suivante :

[C]. $$f(z) = \varepsilon\left(\frac{z}{i}\right)^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right).$$

3° Conservant les notations du paragraphe précédent, montrer que si f possède la propriété [C], alors Φ possède les propriétés [A] et [B]. (On pourra utiliser l'expression de $\Phi(s)$ obtenue en (II 1° *b.*) et faire intervenir le point 1 de l'intervalle d'intégration.)

4° Pour tout élément z de $\mathcal{P}$, on pose :

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$$

a. Calculer, pour t réel strictement positif et y réel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t}\,e^{-2i\pi xy}\,dx$$

(On pourra utiliser, sans la démontrer, l'égalité $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

b. Pour t réel strictement positif et x réel, on pose :

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 t}.$$

La fonction ψ est une fonction périodique de la variable réelle x. Préciser sa série de Fourier et montrer que celle-ci converge vers ψ. En déduire l'égalité $\theta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(-\frac{1}{it}\right)$.

c. Dans l'hypothèse $\left(\lambda = 2,\ k = \frac{1}{2},\ \varepsilon = 1\right)$ et en choisissant une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convenable, montrer que θ possède la propriété [C].

d. Pour tout complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

Déduire de l'étude précédente certaines propriétés de la fonction ζ.

TROISIÈME PARTIE

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : lorsque $|t|$ tend vers l'infini (t réel), on a :

$$\lim\ |\Gamma(\sigma + it)|\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi|t|}{2}}\,|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} = 1,$$

uniformément pour σ appartenant à une partie compacte de $\mathbf{R}$.

1° Soient σ_1, σ_2 des nombres réels vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, U (resp. V) la partie de $\mathbf{C}$ définie par les inégalités $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $|\mathrm{Im}(s)| \geqslant 1$ (resp. $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\mathrm{Im}(s) \geqslant 1$).

Soit h (resp. l) une fonction définie et holomorphe au voisinage de U (resp. V). On suppose qu'il existe des réels positifs α, β_1, β_2 tels que :

$$\begin{cases} \sup_{s \in U} |h(s)| e^{-\alpha|s|} < +\infty \\ \sup_{|t|\geqslant 1} |t|^{-\beta_j} |h(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j=1,2). \end{cases}$$

$$\left(\text{resp.} \begin{cases} \sup_{s \in V} |l(s)| e^{-\alpha|s|} < +\infty \\ \sup_{t\geqslant 1} t^{-\beta_j} |l(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j=1,2). \end{cases}\right)$$

Soit L la fonction affine telle que : $L(\sigma_j) = \beta_j$, $(j = 1, 2)$.

Démontrer qu'il existe un réel M tel que, quel que soit $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, on ait :

$$\sup_{|t|\geqslant 1} |t|^{-L(\sigma)} |h(\sigma+it)| \leqslant M \quad (\text{resp. } \sup_{t\geqslant 1} t^{-L(\sigma)} |l(\sigma+it)| \leqslant M).$$

(On se ramènera à démontrer le résultat concernant V et l, puis, en divisant l par la fonction $\left(\frac{s}{i}\right)^{L(s)}$, on se ramènera au cas où : $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

On reprend maintenant les notations et hypothèses de la deuxième partie.

La fonction f vérifie [C] et n'est pas constante.

Soit m un entier strictement positif tel que $a_m \neq 0$.

Soit Z une primitive de $s^{\frac{k-1}{2}} m^s \varphi(s)$, dans le quart de plan :

$$\operatorname{Re}(s) > 0, \quad \operatorname{Im}(s) > 0.$$

2° On donne des réels σ_1, σ_2 vérifiant : $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, et l'on note V la partie de **C** définie par : $\sigma_1 \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\operatorname{Im}(s) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $Z(s)e^{-\alpha|s|}$ soit bornée sur V.

3° Soit σ un réel tel que $\sigma > \rho + 1$. Démontrer que, pour a réel, on a : $\sup_{t\geqslant 1} t^{-a} |Z(\sigma + it)| < +\infty$ si, et seulement si : $a \geqslant \frac{k+1}{2}$.

4° *a.* Démontrer que, quel que soit σ réel, il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{|t|\geqslant 1} |t|^{-a} |\varphi(\sigma + it)| < +\infty.$$

(On utilisera la question 1° en prenant σ_2 strictement supérieur, en particulier, à $\rho + 1$, et : $\sigma_1 = k - \sigma_2$).

b. Démontrer que, pour σ réel $(\sigma > \rho + 1)$ et z élément de $\mathfrak{P}$, on a :

$$f(z) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

c. Évaluer l'intégrale suivante, pour z élément de $\mathfrak{P}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\frac{k}{2}} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

On suppose désormais que les coefficients de Fourier de f (I 1° *b.*) sont réels, qu'il existe $\beta \in \left[0, \frac{k+1}{2}\right[$ tel que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives, $u^\beta |f(e^{iu})|$ reste borné et qu'enfin la fonction φ n'a qu'un nombre fini de zéros sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{k}{2}$.

5° *a.* Démontrer que $i^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \Phi(s)$ est réel pour $\operatorname{Re}(s) = \frac{k}{2}$, et que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \left| \Phi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \quad \text{reste borné.}$$

b. En déduire que, lorsque T, réel, tend vers $+\infty$,

$$T^{-\beta} \int_0^T t^{\frac{k-1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \quad \text{reste borné.}$$

c. Démontrer que : $\sup_{t\geqslant 1} t^{-\beta} \left| Z\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| < +\infty$.

Quelle conclusion peut-on tirer des calculs précédents ?

6° Les notations sont celles de la dernière question de la deuxième partie.

a. Établir, pour z élément de $\mathfrak{P}$, l'égalité :

$$\theta\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}.$$

b. Démontrer que la fonction ζ a une infinité de zéros sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.